1. **A:**

**בסעיפים הבאים ציין לגבי כל טענה האם היא נכונה או שאינה נכונה.**

**ב.  ג . ד .**

**ט. י. יב. .**

תשובות: ב. נכון. ג. נכון. ד. לא נכון. ט. נכון. י. לא נכון. יב. לא נכון.

1. **יהיו  .**
2. **רשום את  ואת  .**
3. **הוכח: לכל A, B, C (קבוצות)**
4. ****
5. ****
6. **תהיינה  קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך (ע"י דוגמה נגדית) כל אחת מהטענות הבאות:**
7. ****

הראינו דוגמא נגדית. (הערה השוויון מתקיים אמ"ם )

1. ****
2. **תהיינה  קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות:**
3. **אם  אז **

הגדרת הביטוי היא: קיים כך שמתקיים . מ.ש.ל.

1. **אם  אז .**

תהי X קבוצה השייכת ל, ואיננה הקבוצה הריקה. מכאן נובע שX מוכלת בA, ולכן לא קיים איבר בX שהוא קיים בB, ומכיון שכל הקבוצות הנמצאות ב (מלבד הקבוצה הריקה) מכילות איבר הנמצא בB – לכן X לא שייכת ל.

באופן אנלוגי ניתן להוכיח שכל קבוצה השייכת ל אינה שייכת ל מלבד הקבוצה הריקה.

ולכן הקבוצה היחידה השייכת לחיתוך קבוצות החזקה היא הקבוצה הריקה.

1. **תהיינה  קבוצות כלשהן. הוכח ששתי הטענות הבאות הן שקולות:**

**1)  2) **

טענה 1 גוררת את 2:

שלב א:

(אם אין איבר בקבוצה A שאינו קיים בB – הרי שהאיחוד ביניהן הוא B).

שלב ב:

(אם אין איבר בקבוצה C שאינו קיים בB – הרי שהחיתוך ביניהן הוא B).

כשנציב את שני השלבים בטענה 2 – נקבל מ.ש.ל. א.

טענה 2 גוררת את 1:

**למה:** לכל שתי קבוצות מתקיים

**הוכחה:** יהי x איבר בA שאינו איבר בB – הרי שהוא קיים בשתי הקבוצות הימניות ואינו קיים בשמאלית. יהי x איבר בB שאינו איבר בA – הרי שהוא קיים בקבוצה הימנית בלבד ואינו קיים בשתי השמאליות. יהי x איבר משותף לשתיהן – הרי שהוא קיים בכולן. יהי x איבר שאינו קיים בשתיהן – הרי שאינו קיים באף אחת מכולן.

**טענה 1 אומרת:** כל איברי A קיימים בB, וכל איברי B קיימים בC.

נראה כי **טענה 2** אומרת את אותו הדבר (בשימוש בלמה שהוכחה לעיל):

מ.ש.ל. ב.

מ.ש.ל.

1. **לכל שתי קבוצות  ההפרש הסימטרי בין A ו- B מוגדר להיות הקבוצה  והוא מסומן .**
2. **יהי U עולם. הוכח שלכל : .**
3. **הוכח: לכל שתי קבוצות A ו- B .  
   מסקנה – ניתן לרשום ומשמעות הביטוי היא - ביצוע שתי הפעולות בסדר כלשהו.**

ניתן לראות בשוויון האחרון, שאם נחליף בין A לבין C לא ישתנה שום דבר בשורה זו, ומכאן:

(המעבר האחרון היה ע"פ ההגדרה של פעולת ההפרש **הסימטרי**).

1. **הוכח / הפרך: לכל שלש קבוצות A, B ו-C .**
2. **הוכח (באינדוקציה על n): לכל n קבוצות ( ) : הקבוצה **

**שווה לקבוצת האיברים השייכים בדיוק למספר אי-זוגי של קבוצות מבין n הקבוצות.**

**בדיקה:** הטענה נכונה-באופן-ריק לגבי קבוצה אחת. הטענה נכונה לגבי 2 קבוצות ע"פ ההגדרה, והיא נכונה לגבי 3 קבוצות כדלעיל 12ג.

**הנחה:** נניח כי הטענה נכונה לגבי k מסוים, כלומר שווה לקבוצת האיברים השייכים בדיוק למספר אי-זוגי של קבוצות מבין k הקבוצות. נסמן קבוצה זו .

**הוכחה:** על סמך הנ"ל נוכיח כי שווה לקבוצת האיברים השייכים בדיוק למספר אי-זוגי של קבוצות מבין הקבוצות.

נחלק את האיברים ל4 קבוצות:

שייך למספר אי-זוגי של איברים מבין k הקבוצות הראשונות, ומכיון שהוא שייך לקבוצה - הרי שהוא שייך למספר **זוגי** של איברים, ואכן הוא **לא שייך** לקבוצה .

שייך למספר אי-זוגי של איברים מבין k הקבוצות הראשונות, ומכיון שהוא לא שייך לקבוצה - הרי שהוא שייך למספר **אי-זוגי** של איברים, ואכן הוא **שייך** לקבוצה .

שייך למספר זוגי של איברים מבין k הקבוצות הראשונות, ומכיון שהוא שייך לקבוצה - הרי שהוא שייך למספר **אי-זוגי** של איברים, ואכן הוא **שייך** לקבוצה .

שייך למספר זוגי של איברים מבין k הקבוצות הראשונות, ומכיון שהוא לא שייך לקבוצה – הרי שהוא שייך למספר **זוגי** של איברים, ואכן הוא **לא שייך** לקבוצה .

מ.ש.ל.

1. **עבור כל אחת מהטענות הבאות, הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית:**
2. **אם  אז .**

דוגמא נגדית:

1. **אם  וגם  אז .**

נניח בשלילה כי הדבר אינו נכון, כלומר: קיים איבר בקבוצה B שאינו קיים בקבוצה C.

אם איבר זה קיים גם בקבוצה A – אז לא מתקיים השוויון בין החיתוכים, ואם הוא לא שייך לקבוצה A – לא יתקיים השוויון בין האיחודים. לכן ניתן לומר שהגענו לסתירה.

באופן אנלוגי נגיע לאותה סתירה אם נניח כי קיים איבר בקבוצה C שאינו קיים בקבוצה B, ולכן מתקיים . מ.ש.ל.

1. **תהיינה  קבוצות כלשהן. הוכח או הפרך ע"י דוגמא נגדית:**
2. **.**

שויון זה לא יכול להתקיים עבור כל קבוצה A שאיננה ריקה. יהיו a,b,c איברים בקבוצות המתאימות, אגף שמאל של השויון הוא: כלומר איבר בודד ואיבר של זוג איברים. ואגף ימין של השויון הוא: כלומר הוא מכיל זוגות איברים בלבד.

1. **א. לכל  נגדיר** **. מצא את  ,** ** ו-  בהנחה שהעולם הוא .**

אכתוב את התשובות לשלשתם, ונוכיח הכל באינדוקציה. לכן אכתוב הכל לפי חיתוך/איחוד בין n קבוצות:

הערה: הנחתי שהקבוצה איננה כוללת את המספר 0. אם נניח שהוא נכלל בקבוצה, אז התשובה לחלק השני היא הקבוצה שמכילה את המספר אפס בלבד.

בדיקה: הטענות כולן נכונות לגבי , והדבר טריוויאלי מכדי להכתב כאן...

טענה: הטענות נכונות לגבי , כלומר:

הוכחה: ע"פ הנ"ל צ"ל כי הטענות נכונות גם לגבי :

הוכחת טענה ראשונה:

השויון האחרון נכון כי בקבוצה קיימים כל המספרים השלמים שערכם המוחלט קטן ממש מ, ובקבוצה קיימים כל המספרים האלו, וגם שני המספרים . ומכאן שלכל k מתקיים .

ומכיון שהדבר נכון לכל k טבעי, בפרט הוא נכון כאשר k=100 כנדרש בשאלה.

הוכחת טענה שניה:

כל קבוצה בחיתוך מכילה את האיברים ע"פ ההגדרה, ולכן ברור שהקבוצה מוכלת בכולן, ובמילא היא מוכלת בחיתוכן. היא גם מכילה את החיתוך, כיון שהיא אחת מהקבוצות הנחתכות בו, ולכל שתי קבוצות מתקיים (כנ"ל בלמה שבשאלה 8).

הוכחת טענה שלישית:

המעבר האחרון היה ע"פ הטענה הראשונה.

מסקנא: